

# Diseño de planteamiento problemático en el enfoque de modelación para enseñanza de la matemática: la población de Calderitas

## Problem statement design in modeling approach for mathematical teaching: Calderitas population

Aldo David Moreno Habana<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>*Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Chetumal, Av. Insurgentes No. 330, Esq. Andrés Quintana Roo, Colonia David Gustavo Gutiérrez, Apdo. Postal 267 C.P. 77013, Chetumal, Quintana Roo, México.*

*\*Corresponding author:  
aldo.mh@chetumal.tecnm.mx*

**Resumen.** El enfoque de modelación matemática es un enfoque didáctico que ha tomado cada vez más fuerza por sus ventajas; para poder utilizarlo, se debe plantear al estudiante problemas con características específicas, como ser abiertos, pertenecer a contextos reales, motivar a usar representaciones matemáticas y transitar entre el contexto real y los elementos matemáticos. Al respecto, el docente es el encargado de diseñar el planteamiento del problema con el que trabajará el estudiante. El presente documento, tiene por objetivo analizar el proceso de adecuación del planteamiento problemático titulado “La población de Calderitas”, el cual se ha utilizado y refinado al aplicarse con estudiantes del área de ciencias de la salud, en la Universidad de Quintana Roo, en asignaturas como Cálculo y Estadística. La metodología que se utilizó fue de corte cualitativo, tipo investigación acción. Los hallazgos de esta investigación muestran que el tipo de respuestas y desempeño que muestran los

estudiantes está relacionado con el tipo de planteamiento que se les presenta. Se concluye que el proceso de optimización del planteamiento de un problema para la modelación matemática es un proceso iterativo que se basa en el análisis contrastante entre el planteamiento que se presenta y el tipo de modelo y limitaciones que muestra el estudiante a lo largo de las sesiones de trabajo; así como que el rol del docente como guía es fundamental para enfocar el trabajo del estudiante y asegurar el aprendizaje de los contenidos pertenecientes al curso en el que se use el enfoque de modelación.

**Palabras clave:** Modelación matemática, rol docente, contexto problemático, crecimiento poblacional.

**Abstract.** The mathematical modeling approach is a didactic approach that has become increasingly popular due to its advantages. For it to be developed

successfully, the student must be presented with problems with specific characteristics, such as being open, belonging to real contexts, motivating the student to use different mathematical representations, and mainly moving between the real context and mathematical concepts, representations and procedures. Therefore, the teacher is in charge of designing the problem statement based on which the student will work. This paper has the goal of making an analysis about the process of adequation of the problematic approach entitled "The population of Calderitas", which has been used and refined through its application with students in the health area at Quintana Roo University, in subjects such as Calculus and Statistics. The methodology used along this work had a qualitative, investigation action specifically. The results from this investigation show that the kind of students answers and performance are related with the kind of problem they work with. It is concluded that the optimization process of the approach of a problem for mathematical modeling is an iterative process that is based on the contrasting analysis between the approach that is presented and the type of model and limitations that the student shows throughout the sessions of work; as well as that the role of the teacher as a guide is essential to focus the student's work and ensure the learning of the contents belonging to the course in which the modeling approach is used.

**Keywords:** Mathematical modeling, teaching role, problematic context, population growth.

## I. INTRODUCCIÓN

Desde 1980, se pueden encontrar dos grandes perspectivas sobre la enseñanza de las matemáticas: una pragmática y una humanista. La primera tiene un enfoque con objetivos utilitarios, y en ella se enfatiza la habilidad de los estudiantes en aplicar estrategias o conceptos matemáticos que les fueron enseñados para resolver problemas abstractos o contextualizados. Por el otro lado, el enfoque científico-humanista se centra en que el estudiante desarrolle habilidad para crear relaciones entre la realidad y las matemáticas. (Cirillo, 2016,p7).

Dentro del enfoque científico-humanista se encuentra el enfoque de enseñanza llamado "modelación matemática. Al respecto en NCTM (2016) se indica que Zbiek y Conner describen las ventajas de usar este enfoque, dentro de las cuales se encuentran las siguientes:

- (a) Prepara a los estudiantes para trabajar profesionalmente con modelación matemática.
- (b) Motiva a los estudiantes para aprender matemáticas mostrando su aplicabilidad en el mundo real.
- (c) Provee a los estudiantes de oportunidades para integrar a las matemáticas con áreas de su plan de estudio.

Además, Doer, citado por Kevin (2016, p.77) comenta que la enseñanza tradicional de la matemática, anteriormente llamada pragmática, no permite a los estudiantes experimentar el proceso de modelación; y por tanto, les priva de experimentar en primera mano la elegancia, poder y belleza de las matemáticas que están aprendiendo.

La modelación matemática es útil para profesionales en matemática aplicada, estudiantes de ciencias naturales como biología, así como para toda la variedad de ingenieros, desde áreas como eléctrica, civil, computación, redes, en gestión empresarial, en administración, etc. Todo ese conjunto de profesionales debe lidiar, desde su contexto particular, con una variedad de fenómenos y situaciones problemáticas del mundo real; lo cual implica el reto de traducir información y características reales dadas en lenguaje y conceptos matemáticas, siendo esto la esencia de la modelación matemática. O, en otras palabras: Se busca aplicar las matemáticas para entender, evaluar o predecir algo relacionado con aspectos no matemáticos.

Para el uso didáctico de la modelación matemática, se requieren distintos elementos, entre ellos el ambiente de aprendizaje, desempeño docente, planteamientos problematizadores, entre otros. El contenido del presente documento se centra en el último elemento: los planteamientos problematizadores, teniendo por objetivo describir el proceso de refinación de un planteamiento problematizador llamado "La población de Calderitas", que es útil para la enseñanza de la matemática bajo el enfoque de modelación. Dentro de los resultados que se muestran están distintas evidencias de estudiantes de la Universidad de Quintana Roo, tras utilizar el planteamiento dentro de cursos de las asignaturas Matemáticas Generales y Bioestadística; concluyendo que dichos resultados están relacionados con las características de los planteamientos que se les presentan.

## II. MARCO TEÓRICO

En recientes años, es cada vez más fácil encontrar estudios en los que se analizan las fortalezas de usar el enfoque de modelación matemática dentro de proceso de enseñanza aprendizaje en programas de licenciatura (Quiroz y Rodríguez; 2016; Carmona, Cristobal y Vargas, 2018; Schoenfeld y Li, 2019; Majid y Rayadi, 2018).

Dentro de la modelación matemática como enfoque de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, “se comienza con una situación en el mundo real que tu quieres entender, extraer sus características más importantes y las expresas matemáticamente, y luego analizas el modelo matemático resultante, obtienes una solución matemática y quizás perspectivas adicionales dentro del problema del mundo real, y haces predicciones” (NCTM, 2016, p ix). A lo largo de este texto se le llamará planteamiento problemático al planteamiento que promoverá que el estudiante desarrolle el proceso descrito anteriormente.

Algunos autores indican que “la modelación significa usar matemáticas o estadística para describir una situación del mundo real, y deducir información adicional sobre la situación, mediante el análisis y cálculo matemático o estadístico” (NCTM, 2016, p vii).

Lo que distingue a la modelación matemática de otro tipo de enfoques de enseñanza es (NCTM, 2016, p vii):

- (1) Existe en el inicio del análisis una atención explícita sobre el proceso de problematizar el problema o fenómeno real, y
- (2) Contraste entre las características del problema o fenómeno real con los productos matemáticos obtenidos, buscando que los resultados sean correctos y coherentes con la situación real y los conceptos matemáticos.

Además, se puede mencionar que las características principales de la modelación matemática son:

- (a) Conectar de forma auténtica al mundo real con los contenidos matemáticos, comenzando con problemas poco definidos dentro de un contexto desorganizado, en lo que no necesariamente hay una sola respuesta.
- (b) Buscar explicar un fenómeno, resolver un problema o dar información para tomar una decisión, ya sea por medio de propiedades definitivas, encontrando patrones o haciendo aproximaciones del sistema real.
- (c) Requerir que el modelador sea creativo, defina suposiciones y opciones, y tome decisiones.

- (d) Ser desarrollada a lo largo de un proceso iterativo.
- (e) Favorecer que el desarrollo de análisis de la situación problemática acepta distintas aproximaciones, en vez de poseer uno predefinido con una respuesta única.

Otro de los factores importantes dentro del enfoque de modelación matemática como estrategia didáctica es el docente, quien tiene el rol de guía del proceso. Dentro de sus actividades está generar un ambiente de discusión y revisión alrededor de los modelos generados por los estudiantes, guiarlos para que pongan a prueba sus propios modelos, garantizar que sean conscientes de la relación entre el contexto real y los conceptos matemáticos, y buscar que se profundice en las propiedades y definiciones de los conceptos matemáticos utilizados en el proceso de análisis; entre otros aspectos (NCTM, 2016, p 25).

Por otro lado, otros autores indican que para que el docente sea un buen facilitador del proceso didáctico este debe tener conocimientos y habilidades sobre dos áreas: el proceso general de modelación matemática y, desempeño y proceso de aprendizaje esperado por parte de sus estudiantes.

El primer conjunto de conocimientos hace referencia a lo que se menciona a lo largo de este texto, como tipos de modelos, representaciones, fases en el proceso, etc. Mientras que el segundo conjunto de conocimientos se refiere a las posibles propuestas, respuestas, dudas y modelos en general que pueda proponer el estudiante durante su trabajo con el problema (Bleiler-Baxter, Barlow y Stephens; 2016, p53).

Para garantizar lo anterior, muchas investigaciones se han centrado en enunciar principios para la enseñanza de las matemáticas mediante modelación, los cuales se describen a continuación (NCTM, 2016, p 26).

- (i) Alternativas de perspectivas: se debe asegurar que el estudiante comprende y conoce que existen distintas perspectivas para analizar el problema; y que la elección de una de ellas para trabajar dependerá de la información que tiene a la mano, la que pueda investigar por sí mismo y el producto o objetivo que quiere alcanzar tras hacer el análisis del problema.
- (ii) Familiaridad: Se debe mantener la motivación y atención del estudiante a lo largo de todo el proceso,

asegurando el interés en el proceso por medio de discusiones e intercambio de ideas.

(iii) Requisitos: El docente debe buscar que el estudiante evalúe su propio conocimiento sobre el contexto, como conceptos, vocabulario e información contextual que vaya a ser útil para la comprensión, análisis y resolución del problema; y caso de ser necesario, investigar antes del inicio de esas actividades.

(iv) Complejidad accesible: Es positivo para el proceso que el estudiante tenga consciente y revise continuamente la complejidad del acercamiento que está teniendo hacia el problema; tanto en representaciones, conceptos matemáticos, cantidad de variables, etc.

(v) Objetivo en la mira: Se debe verificar continuamente que el estudiante continúa teniendo en mente el objetivo o información que se quiere obtener por medio del análisis y proceso de modelación; y en caso de observar que se ha desviado de su tarea, redirigirlo por medio de preguntas que lo hagan reflexionar.

Además, otro tipo de apoyo que puede prestar el docente hacia sus estudiantes es por medio de preguntas, las cuales buscan ser guía en el proceso de modelación. Como ejemplo se presentan las siguientes preguntas, propuestas por Christopher, Sarah y Angela (Bleiler-Baxter, Barlow y Stephens; 2016, p.56):

1. ¿Qué información es la más relevante?
2. ¿Se puede desechar alguna información?
3. ¿Se pueden tomar algunas suposiciones o aproximaciones para simplificar la situación?
4. ¿Qué relaciones o patrones encuentras en la información?
5. ¿Qué herramientas nos ayudarían a descubrir patrones o relaciones?
6. ¿Qué herramientas pueden ser útiles para representar los patrones y relaciones encontrados?
7. ¿El modelo describe la situación de estudio guardando concordancia con la información conocida?
8. ¿El modelo hace predicciones o explica situaciones de manera razonable y ayudando a otras personas a comprender más fácilmente?
9. ¿El modelo sigue siendo útil haciendo cambios a la información y contexto general?

Se puede observar que las preguntas enlistadas aplican para distintos momentos del proceso de modelación, sépanse: las preguntas del uno al tres aplican para la fase

inicial; las preguntas del cuatro a la seis, en la fase de matematización; y las últimas tres, a la fase de comprobación del modelo; las cuales se describirán más profundamente en los siguientes párrafos.

Es importante observar que las preguntas enlistadas son ejemplos, por lo que pueden ser replanteadas o complementadas con otras; así como también, no necesariamente se deben plantear todas esas preguntas a los estudiantes y en el orden indicado, sino que se deberán usar dependiendo del momento en el que se encuentre el proceso de modelación y las propuestas que haya en el grupo.

La herramienta central de la puesta en práctica del enfoque de modelación para la enseñanza de las matemáticas son los contextos problemáticos; los cuales se utilizan como detonador de la actividad de los estudiantes. Al respecto, se debe hacer una diferencia entre los problemas matemáticos puros y los problemas de aplicación, llamados contextos problemáticos en este texto; donde los primeros hacen referencia a buscar propiedades, teoremas y representaciones simbólicas sobre objetos pertenecientes al mundo matemático, mientras que los problemas de aplicación son planteamientos contextualizados en fenómenos del mundo real (Groshon, 2016, p.18).

Cabe especificar que los contextos problemáticos útiles para el enfoque de modelación no son como los que se pueden encontrar en muchos libros de texto académico, en los que por medio de una narrativa organizada se le exponer el estudiante toda la información que necesita para solucionar el problema; en cambio, los contextos problemáticos para modelación matemática plantean información desorganizada, inclusive incompleta, sin especificar un método o variable de análisis (Groshon, 2016, p.20).

Por otro lado, Werner y Rita (2016) indican diversos lineamientos para diseñar problemas contextualizados útiles para modelación, los cuales se describen a continuación (Blum y Borromeo, 2016, p70).

- (a) Debe contextualizarse en temas reales y cercanos a experiencias previas de los estudiantes, o a sus áreas de estudio.
- (b) El problema debe de ser accesible y atractivo para los estudiantes.

(c) El planteamiento debe ser lo suficientemente complejo como para no dejar explícito el enfoque o método de solución.

(d) Debe permitir la existencia de diversas soluciones, así como motivar el uso de distintas representaciones a lo largo del análisis del planteamiento.

(e) Se debe buscar que, a lo largo del análisis de resolución, se utilicen diversos métodos de trabajo: grupal, en equipo, individual.

(f) Se debe buscar que el producto final que se solicita en el planteamiento requiere que el alumno pase a lo largo de todas las fases del proceso de modelación matemática.

(g) El planteamiento debe permitir al estudiante usar continuamente el vocabulario matemático y practicar las habilidades que sean parte de los objetivos de la secuencia didáctica.

(h) Parte de los productos que el estudiante debe desarrollar deben pedir la reflexión respecto al proceso de resolución, así como el potencial del modelo desarrollado para solución de otros problemas.

Ahora bien, un modelo matemático es la representación de un sistema, concepto o fenómeno, que se usa para obtener comprensión cuantitativa o cualitativa de él, y así poder predecir su comportamiento y facilitar el proceso de toma de decisiones y resolución de problemas (Cirillo et al, 2016, p 6)

Si bien, existen diversas clasificaciones de un modelo matemático, en este documento solo se mencionarán 2 perspectivas. Por un lado, los modelos de un problema pueden ser clasificados de forma general en 2 tipos (Groshong, 2016, p19):

1. Deterministas: Aquellos que se basan en la relación funcional de las variables inmersas en el modelo.
2. Probabilísticos: Aquellos que se construyen desde una perspectiva probabilística.

Por otro lado, los modelos se pueden caracterizar según la información de la que parten, separándose en 1) Empírico, cuando se parte de una base de datos reales, y 2) Teórico, cuando se parte de principios y conceptos teóricos de distintas áreas del conocimiento humano (Groshong, 2016, p20).

Lo anterior da pie a la obtención de distintos modelos, que utilizarán distintas herramientas matemáticas para su análisis (Groshong, 2016, p18). Cabe observar aquí que el tipo de datos y planteamiento que se presente al

estudiante afectará el tipo de modelo que vaya a desarrollar.

Por otro lado, es oportuno comentar que existen diversas representaciones de un modelo, dentro de las cuales se pueden encontrar las siguientes:

(a) Pictórica: Mediante el uso de dibujos o esquemas.

(b) Tabular: en la que se representa la información de forma ordenada por medio de un arreglo de filas y columnas.

(c) Gráfica: utilizando un plano cartesiano o alguno otro arreglo que se base en elementos geométricos para describir características del fenómeno analizado.

(d) Algebraica: que se basa en símbolos algebraicos, así como una notación funcional para expresar la relación entre dos variables.

(e) Dinámica: consistente en el uso de programas computacionales por medio de los que se puede mostrar la relación entre la variación de los componentes del modelo.

(f) Oral: Expresión en prosa de las propiedades principales del fenómeno de estudio.

Si bien existen distintas propuestas teóricas respecto al proceso de modelación matemática que pueda desarrollar el estudiante, en este trabajo se describe el expuesto por Blum (Caglar et al, 2017, p8; Blum y Borromeo, 2016, p66) . Este proceso consta de 7 fases, las cuales se muestran esquemáticamente en la Figura 1 y se describen a continuación:

1. Comprensión: En esta primera fase, el estudiante lee y comprende lo que el planteamiento presenta y solicita como producto. El estudiante define conceptos básicos que describen el fenómeno o tema que contextualiza el problema. Esta fase implica la traslación de la situación real a una situación específica modelada.

2. Simplificación y estructuración: Etapa en la que el estudiante elige los datos que tomará como trascendentes dentro del proceso de resolución, investiga datos que considere faltantes y establece una estrategia de análisis. En esta fase se transforma la situación específica modelada en un modelo real, muchas veces cualitativo.

3. Matematización. El estudiante utiliza los conceptos, cantidades, reglas y otras propiedades indicadas en las fases anteriores, y las comienza a representar mediante recursos matemáticos. En esta fase, se abandona el contexto real inicial del problema, y se continúa el análisis desde un enfoque puramente matemático.

4. Trabajo matemático. En esta fase del proceso, se hace la manipulación de los recursos o representaciones matemáticas, buscando encontrar patrones y relaciones entre las variables que se decidieron analizar. Al final de esta etapa, se obtienen resultados matemáticos provenientes del modelo matemático representado anteriormente.

5. Interpretación. En esta parte del proceso, el estudiante busca comprender las implicaciones de los resultados matemáticos obtenidos en la fase anterior respecto al contexto real de los que se originaron los datos.

6. Validación: Esta fase consiste en verificar la congruencia entre los resultados reales obtenidos tras el análisis del problema y el modelo de la situación particular que se analizaba.

7. Exposición: Finalmente, el estudiante regresa a la situación real planteada inicialmente y da respuesta a lo que se le solicitó.

Respecto al proceso anterior, se deben hacer algunas observaciones. Se resalta que la estructura descrita es una propuesta de un investigador entre muchos respecto a este enfoque didáctico, por lo que no debe ser tomada como absoluta. Además, dichas fases no siempre tomarán lugar en ese orden obligatorio, inclusive dos fases distintas podrían presentarse simultáneamente en distintos estudiantes a lo largo del trabajo; ahí radica la importancia y trascendencia del acompañamiento del docente con las características que se han indicado anteriormente

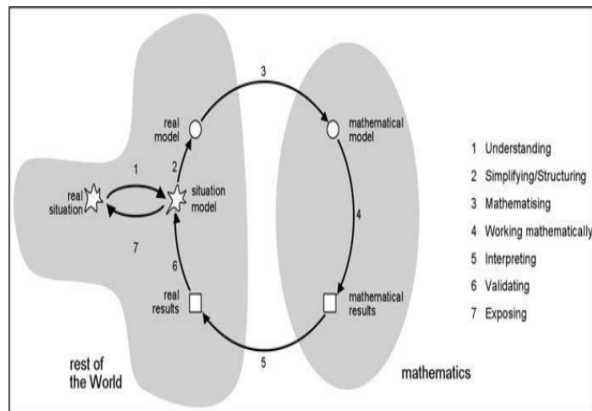


Figura 1. Se muestra la representación esquemática del proceso de modelamiento propuesto por Blum. Fuente: Diagrama rescatado de Cirilo et al (2016).

## I.

## III. METODOLOGÍA

Para el desarrollo del presente proyecto se utilizó un enfoque cualitativo, tipo investigación acción, y el procedimiento consistió en un proceso iterativo de tres ciclos. En cada uno de ellos se aplicó el planteamiento problematizador llamado “La población de Calderitas” con un grupo de estudiantes de la Universidad de Quintana Roo, específicamente del área de ciencias de la salud. En el primer ciclo solo se trabajó con estudiantes en la materia de Matemáticas Generales; en el segundo ciclo se trabajó con la misma asignatura, además de la de Cálculo; y por último en el tercer ciclo se utilizó el planteamiento en la asignatura de Bioestadística.

Cabe comentar que cada ciclo constó del siguiente proceso: uso didáctico del planteamiento problematizador, análisis de productos desarrollados por estudiantes en clase y rediseño de planteamiento problematizador.

## IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Inicialmente, se usaba el siguiente planteamiento dentro de las actividades de clase:

“Se sabe que una ciudad tiene una población de 65,000 habitantes; si en los años anteriores se ha observado una tasa de crecimiento del 7%, ¿En cuánto tiempo la ciudad tendrá 80,000 habitantes? Utilice el concepto de función exponencial para responder.”

Dicho planteamiento fue utilizado inicialmente en la asignatura de Matemáticas Generales y no presentaba las características necesarias para poder ser utilizado dentro del enfoque de modelación; ya que no cuenta con las características mencionadas en apartados anteriores en este documento, sépase: planteamiento abierto, desordenado, no permitir la creatividad del estudiante, requerir distintos tipos de representaciones y métodos de resolución, estar vinculado con el mundo real, etc.

Se aprovecha para compartir la imagen de la resolución de un estudiante, Figura 2. Se puede observar que el proceso de resolución del estudiante es puramente algorítmico; sin embargo, no se profundiza en la relación entre los símbolos y recursos matemáticos, y el contexto del problema.

$P_0 = 65000,$   
 $t = 7\%$   
 Fórmula  
 $P_F = P_0 (1+t)^{n-1}$   
 $P_F = 80000 = 65000 (1+0.07)^{n-1}$   
 $\frac{80000}{65000} = 1.07^{n-1}$   
 $\rightarrow \log_{1.07} \left( \frac{80000}{65000} \right) = n-1$   
 $\rightarrow n = \log_{1.07} \frac{80000}{65000} + 1$   
 Respuesta  
 $n = 4.07$

Figura 2. Procedimiento de resolución del problema de “La población de Calderitas” desarrollado por un estudiante de primer semestre en la asignatura de Matemáticas Generales. Fuente: Elaboración propia.

Cabe comentar que en el momento en el que se utilizó ese planteamiento, la enseñanza era pragmática con un docente expositor de procedimientos y un estudiante pasivo y receptor.

Motivado por procesos de capacitación docente sobre modelación matemática, el docente decidió comenzar la transición de una enseñanza pragmática a una humanista, y por ende la adaptación de los planteamientos que usaba como estrategias didácticas.

Dada la motivación de utilizar la modelación matemática, se decidió replantear el problema enfocándose en las siguientes características:

- (i) Utilizar diversos métodos de trabajo.
- (ii) No dejar explícito el enfoque o método de solución en el planteamiento.
- (iii) Contextualizar sobre temas reales y cercanos.
- (iv) Definir el planteamiento de manera que el problema sea accesible y atractivo.

Para alcanzar lo anterior, el nuevo planteamiento fue el siguiente:

La localidad de Calderitas, en Quintana Roo, está creciendo mucho. A sus pobladores les gustaría revisar la posibilidad de convertirse en municipio, pero ellos saben que para poder alcanzar dicho objetivo, deben tener una población de más de 10,000 habitantes. ¿En

qué año les recomendarías que metan su solicitud?

Como se puede observar, se eliminó del planteamiento la indicación del concepto o herramienta matemática que debía usar el estudiante, además de agregarse un contexto real y cercano para el mismo, así como también se modificó la pregunta que le indicaba la tarea al estudiante.

Sin embargo, se debe decir que dicho planteamiento no logra cumplir con todas las características fundamentales para la modelación, como buscar que el alumno ponga a prueba el modelo que desarrolló por medio de otros contextos, entre otras.

A pesar de lo anterior, su utilización sí mostró un cambio en el tipo de respuestas que se obtenían de los estudiantes; ya que ahora ellos requerían analizar el contexto, obtener y determinar más datos que no venían indicados en el planteamiento y crear sus propias representaciones y procedimientos para analizar la información. Por ejemplo, debido a que el planteamiento no daba información respecto al tamaño de la población de Calderitas, el estudiante debía investigar ese dato por medio de bases de datos del Instituto Nacional de Estadísticas y Geografía (INEGI).

Es importante resaltar que parte de la solidez de las respuesta o modelos de los estudiantes no solo fue debido al planteamiento, sino también al desempeño docente. El docente fungía como guía del proceso, planteando preguntas que promovían la reflexión, contrastación y puesta a prueba de los modelos que iban desarrollando los estudiantes; por ejemplo: ¿Cómo estamos suponiendo que crece la población?, lo cual orillaba al estudiante a reflexionar sobre modelar el crecimiento de la población por medio de una progresión aritmética o geométrica.

Dentro de la materia de Matemáticas Generales, el planteamiento permitió la revisión de conceptos como función lineal, función exponencial, progresión aritmética, progresión geométrica, tasa de crecimiento, logaritmos, ecuaciones y despejes, transitando entre diversas representaciones, entre ella: tabular, algebraica, gráfica y oral. Dicho planteamiento se utilizó durante 3 ciclos consecutivos, siempre en la misma asignatura y con estudiantes de primer semestre, con edades entre 18 y 19 años, del área ciencias naturales; obteniéndose resultados y desempeños muy parecidos.

A continuación, la Figura 2 muestra un ejemplo de anotación desarrollada por un estudiante; se recalca que el objetivo de este texto no es profundizar en los modelos creados por los estudiantes, sino describir el proceso de adecuación del planteamiento del problema para ser aplicado desde el enfoque de modelación.

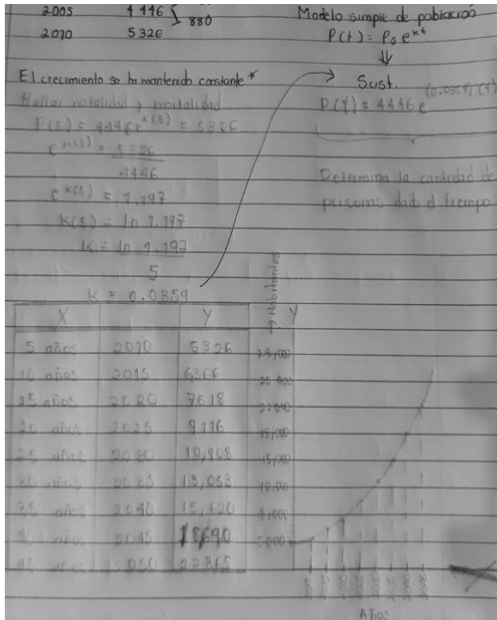


Figura 3. Procedimiento de resolución del problema de “La población de Calderitas” desarrollado por un estudiante de tercer semestre en la asignatura de Cálculo. Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que el tipo de productos que fueron desarrollados por los estudiantes fueron distintos a los obtenidos en ciclos anteriores, derivado del tipo de planteamiento que se les ofreció, así como las discusiones que se generaron en las sesiones de trabajo.

Posteriormente, se tuvo la oportunidad de aplicar dicho planteamiento con estudiantes de segundo semestre, en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral. Cabe comentar que dichos alumnos habían cursado en el semestre anterior la asignatura de Matemáticas Generales, por lo que ya conocían el planteamiento. Sin embargo, en esta ocasión se les guió para analizar sus modelos desde la perspectiva de razón de cambio, provocando el desarrollo del concepto de derivada y aplicar procesos de derivación, hasta llegar a la introducción de un modelo de crecimiento poblacional utilizando ecuaciones diferenciales; además de que permitió ampliar el problema a otros contextos como el

crecimiento poblacional de bacterias y de animales. Para lograr lo anterior, el rol del docente fue trascendente, ya que se guio a los estudiantes por medio de preguntas como ¿Qué tan rápido está creciendo la población? Y ¿La razón de cambio de la cantidad de habitantes depende del intervalo de tiempo en el que lo estemos analizando?

Llegados a este punto, a finales del periodo de verano 2020, se reformuló el planteamiento del problema, buscando resaltar otras características mencionadas por estudiosos del enfoque de modelación, además de las ya satisfechas en el primer replanteamiento; entre dichas características están:

- (a) El planteamiento promueve el uso de vocabulario y práctica de las habilidades matemáticas.
- (b) Permite la existencia de diversas soluciones y representaciones.
- (c) Solicita productos que buscan reflexión respecto al proceso de resolución y el potencial del modelo desarrollado.
- (d) Requiere que el alumno pase a lo largo de las fases del proceso de modelación.

A continuación, se presenta el nuevo planteamiento obtenido:

La comunidad de Calderitas se encuentra en el estado de Quintana Roo y, en el presente, muestra gran crecimiento, tanto desde el punto de vista económico, como territorial y en número de habitantes. Debido a dicho crecimiento, un grupo de habitantes de Calderitas han comenzado a proponer que la comunidad busque ser reconocida como cabecera municipal, ya sea del municipio de Othon P. Blanco (al cual pertenece en el presente) o de un nuevo municipio, y de esa forma asegurar su posición respecto a las otras zonas turísticas del estado. Al revisar la Ley de los Municipios del Estado de Quintana Roo, en su artículo 13, se encontró que existen ciertos requisitos para que lo anterior se pueda realizar, dentro de los cuales se encuentran los siguientes:

1. Que sea conveniente para satisfacer las necesidades de sus habitantes;
2. Que sus recursos de desarrollo potencial le garanticen posibilidades de autosuficiencia económica;

3. Que su población no sea inferior a treinta mil habitantes;

4. Que la comunidad en que se establezca su Cabecera Municipal cuente con más de diez mil habitantes.

Elabora un reporte para esos habitantes donde les expliques la pertinencia y factibilidad de su propuesta, indicándose de ser posible, cuando podrá Calderitas convertirse en cabecera municipal, suponiendo que su crecimiento continúa como se ha mostrado en el presente.

Como se puede observar, se realizaron diversas modificaciones, las cuales tuvieron los siguientes efectos:

(i) Se sustentó la cantidad meta a la que debía llegar la población mediante una ley real, lo que permitió que pueda ser revisada por el estudiante y se refuerce la vinculación con el mundo real.

(ii) Se presentó un planteamiento más complejo respecto a la información que se daba, lo cual produjo que al inicio de su análisis se tuviera una discusión respecto a la información que era útil y la que no, así como aquella que estaba al alcance de los estudiantes, y cuál no.

(iii) La indicación final busca que la respuesta dada por el estudiante no solo sea una cantidad, sino una explicación del proceso de análisis, lo cual le requerirá reflexionar sobre el proceso en el que desarrolló el modelo, evaluar sus ventajas y desventajas, y comunicarlo con personas ajenas.

Dicho planteamiento se utilizó de nuevo con un grupo de primer semestre del área de ciencias naturales, en la materia de Matemáticas Generales. Si bien con la mayoría de los equipos de alumnos se obtuvieron resultados homogéneos con los antecedentes, se encontró una situación nueva. Como se mencionó anteriormente, era esperado que los estudiantes investiguen, por medio del portal del INEGI, la cantidad de habitantes perteneciente a Calderitas, de la que solo se tienen registrados los conteos del 2010 y 2015; sin embargo, en esta ocasión, un equipo de estudiantes encontró un documento donde se mostraban registros del tamaño de la población en años anteriores, por ejemplo: 1990, y 1995.

Este descubrimiento se tradujo en nuevas discusiones a lo largo de las sesiones de análisis, alrededor de preguntas como: ¿Debo usar sólo dos datos para buscar la razón de cambio o puedo usar todos al mismo tiempo? La reflexión que se produjo en el grupo para responder dicha pregunta permitió profundizar en conceptos como promedio y aleatoriedad; lo cual motivó en el docente que aplicaba la actividad revisará la posibilidad de aplicar el planteamiento problemático de Calderitas en una asignatura del área de probabilidad y estadística.

Debe reconocerse que dicho descubrimiento fue gracias a la curiosidad, interés y habilidad de indagación de los estudiantes; lo cual refuerza lo dicho anteriormente: el enfoque de modelación, por medio de planteamientos amplios y poco definidos, motiva el papel activo del estudiante. Además, se considera que hubiera sido un error metodológico que el docente hubiera limitado al estudiante en el uso de datos, ya que no hubiera permitido aumentar la complejidad de los modelos desarrollados por los estudiantes por medio de ideas estadísticas.

Una vez encontrada esa área de oportunidad, al inicio del semestre corriente de Primavera 2021, se aplicó dicho planteamiento como estrategia didáctica en la asignatura de Bioestadística, con estudiantes que ya habían trabajado con este contexto el semestre anterior en la materia de Cálculo. En esta ocasión, el planteamiento tenía por objetivo cambiar la perspectiva de los estudiantes respecto a la aleatoriedad de la variable, y con ello cambiar el tipo de modelos que se generan, específicamente, de modelos deterministas, a otros probabilísticos.

Por último, se comenta que el contenido temático que se pudo revisar por medio de dicho planteamiento fue el referido a correlación y regresión estadística, y el desempeño docente fue primordial para ayudar a los estudiantes a abordar una nueva perspectiva de resolución del problema, debido a que al haberlo resuelto antes usando una determinista, el estudiante consideraba que ya estaba terminado el análisis. A continuación, la imagen 4 muestra evidencia derivada de la aplicación en la asignatura de Bioestadística.

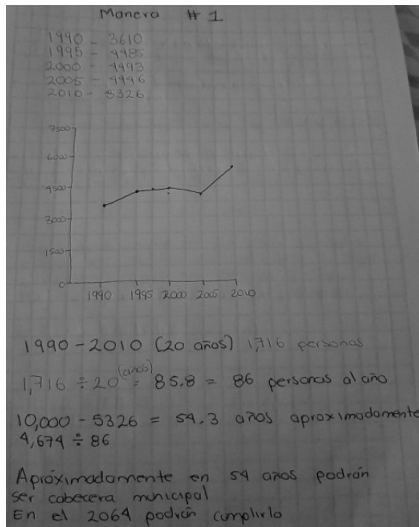


Figura 4. Procedimiento de resolución del problema de “La población de Calderitas” desarrollado por un estudiante de cuarto semestre en la asignatura de Bioestadística. Fuente: Elaboración propia.

## V. CONCLUSIONES

A lo largo del presente documento se ha descrito el proceso de refinación de un planteamiento problemático, buscando que este se adapte cada vez más al enfoque didáctico de modelación matemática, resultando las siguientes conclusiones.

El proceso de definición de un planteamiento problemático útil para la modelación matemática requiere procesos iterativos de análisis. El docente debe de analizar, en cada posibilidad de aplicación, los acercamientos, procesos de análisis y modelos desarrollados por sus estudiantes; tomando mayor énfasis en los supuestos y perspectivas de modelación, los errores y tipo de productos que obtienen.

A lo largo de la aplicación y rediseño de un planteamiento problemático, el docente debe estar abierto para aceptar propuestas y nuevas perspectivas de los estudiantes. Esto permitirá que el estudiante desarrolle y descubra nuevas formas de aplicar la matemática sobre el problema, mientras deja la posibilidad al docente de observar el potencial didáctico que tiene el planteamiento.

El desempeño docente potencia el desempeño del estudiante, tanto por medio de preguntas que lleven a su

reflexión individual, así como generación de discusiones grupales que busquen la mejora de los modelos.

Una de las posibles dificultades al aplicar el enfoque de modelación dentro del curso de una asignatura está relacionada con la ejecución de dicho enfoque didáctico dentro de una institución académica.

En muchas ocasiones, los programas de asignatura, los calendarios, los procesos de evaluación y otras características institucionales quedan fuera del alcance de decisión del docente, lo que implica que el proceso teórico de modelación matemática no se ajuste en su totalidad. Por ejemplo, en ocasiones no se le puede dar toda la libertad de exploración al alumno debido al límite de tiempo que se tiene en el periodo escolar.

Debido a lo anterior, se recomienda que se permita al estudiante explorar un tiempo adecuado y posteriormente dirigirlo a los enfoques o tipos de modelos que se relacionen con el contenido de la asignatura en la que se use el planteamiento problemático.

El docente debe ser consciente de su papel como diseñador de planteamientos problematizadores para modelación matemática; para lo cual debe mantener atención a fenómenos de la vida diaria y vincularlos con los contenidos de su asignatura, y de esta forma comenzar un proceso iterativo de diseño del planteamiento, como el descrito en este documento. Cabe comentar que en ocasiones es necesario que el docente investigue y conozca áreas de conocimiento que no son parte de su formación profesional inicial.

Por último, quien escribe considera que aún hay potencial respecto al planteamiento de “La población de Calderitas”; dentro de las áreas de oportunidad está su aplicación con estudiantes de niveles inferiores al superior, así como su aplicación con docentes; y también potenciar en su ejecución el uso de tecnología.

Por último, es fácil decir que el proceso de aprendizaje de los estudiantes por medio del enfoque de modelación matemática tiene como antecedente y fundamento un continuo proceso de aprendizaje del docente, respecto a la relación entre los modelos producidos por sus estudiantes y el planteamiento problemático que se les presentó.

## REFERENCIAS

- Bleiler-Baxter, S., Barlow, A., Stephens, C. (2016) Cap 5. Moving beyond Context: Challenges in Modeling Instruction. The National Council o Teachers of Mathematics (ed.) En *Mathematical Modeling and modeling Mathematics*. 53-64. Estados Unidos. Association Drive, Reston V.A.
- Blum, W., Borromeo, R. (2016) Cap 6. Advancing the Teaching of Mathematical Modeling: Research-Based Concepts and Examples. The National Council o Teachers of Mathematics (ed.) En *Mathematical Modeling and modeling Mathematics*. 65-76. Estados Unidos. Association Drive, Reston V.A.
- Çağlar, N., Ayşe, T., Semiha, K., Esra, B. (2017) Mathematics Student Teachers' Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(3), 873-892. Recuperado el 4 de marzo de 2020. Disponible en: [10.12973/eurasia.2017.00648a](https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00648a)
- Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M., Rubel, L., (2016) Cap 1. Perspectives on Modeling in School Mathematics. The National Council o Teachers of Mathematics (ed.) En *Mathematical Modeling and modeling Mathematics*. 3-16. Estados Unidos. Association Drive, Reston V.A.
- Groshong, K. (2016) Cap 2. Different Types of Mathematical Models. The National Council o Teachers of Mathematics (ed.) En *Mathematical Modeling and modeling Mathematics*. 17-24. Estados Unidos. Association Drive, Reston V.A.
- Li, Y., Schoenfeld, A. (2019) Problematizing teaching and learning mathematics as “given” in STEM education. *International Journal of STEM Education*, 6(44), 1-13. Recuperado el 4 de marzo de 2020. Disponible en: [10.1186/s40594-019-0197-9](https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9)
- Majid, S., Riyadi, G. (2018) REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION IN COOPERATIVE LEARNING VIEWED FROM LEARNING ACTIVITY. *Journal on Mathematics Education*, 9(2), 301-310. Recuperado el 4 de marzo de 2020. Disponible en: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1194281.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (2016) *Mathematical Modeling and modeling Mathematics*. (ed) Estados Unidos. Association Drive, Reston V.A.
- Rodríguez, R., Quiroz, S. (2016) El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 91-144. Recuperado el 4 de marzo de 2020. Disponible en: <https://www.redalyc.org/pdf/405/40548562004.pdf>
- Sinclair, N. (2016) Cap 3. TouchCounts: Visual, Auditory, Haptic, and Symbolic Models for Numbers and Operations. The National Council o Teachers of Mathematics (ed.) En *Mathematical Modeling and modeling Mathematics*. 27-36. Estados Unidos. Association Drive, Reston V.A.
- Vargas, V., Escalante, C., Carmona, G. (2018) Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación matemática*, 30(1), 213-236. Recuperado el 4 de marzo de 2020. Disponible en: [10.24844/EM3001.08](https://doi.org/10.24844/EM3001.08)