

Estrategia para el aprendizaje de la visualización y localización del punto en el espacio tridimensional usando el software Maple TM

Strategy for learning the visualization and location of the point in space using software Maple TM

Hugo José Bojórquez-Marrufo^{1*}

¹*Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico Superior de Motul, Carretera Mérida-Motul, Tablaje Catastral 383, Motul, Yucatán, México. C.P. 97430.*

**Corresponding author:
hugo.bojorquez@itsmotul.edu.mx*

Resumen: La mayor parte de los estudiantes presentan dificultades para visualizar y localizar un punto cuando éste está dado por medio de una coordenada tridimensional. Una comprensión profunda del punto en el espacio tridimensional permite el correcto manejo de demás conceptos de geometría tridimensional involucrados en la asignatura. Este artículo propone una estrategia para el aprendizaje significativo de este tema en el curso de Cálculo Vectorial que se imparte en el Instituto Tecnológico Superior de Motul. La estrategia hace uso del entorno del estudiante, herramientas para hacer mediciones y materiales didácticos con los que se determinan las coordenadas diferentes objetos, consolidando su comprensión del espacio tridimensional para después representarlo gráficamente empleando el software Maple TM. Como resultado, el 93% de los estudiantes participantes obtuvieron una calificación aprobatoria

en los exámenes correspondientes de la unidad, lo que sugiere un aprendizaje más significativo.

Palabras clave: Visualización, localización, geometría, punto, tridimensional.

Abstract: Most student have difficulties to visualize and locate a point when it is given by three coordinates. A deep understanding of the point in a tridimensional space allows the correct handling of other tridimensional geometry concepts involved in the subject. This article proposes a strategy for meaningful learning on this topic in the Vector Calculus course taught at Instituto Tecnológico Superior de Motul. The strategy makes use of the student's environment, tools to make measurements and didactic materials with which the coordinates of different objects are determined, consolidating their understanding of tridimensional space, and then

representing it graphically using software Maple TM. As a result, 93% of participating students got a passing grade on the corresponding unit exams, suggesting more meaningful learning.

Keywords: Visualization, location, Geometry, Point, Three-dimensional.

I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los estudiantes de Cálculo Vectorial presentan dificultades al visualizar de forma geométrica y localizar un punto en el espacio tridimensional, al que llamaremos simplemente como espacio. Es usual que los estudiantes muestren dificultades en la localización un punto cuando se proporcionan las coordenadas de éste. El proceso inverso también puede ser difícil, determinar las coordenadas de un punto específico en el espacio. Aun cuando en apariencia, ambos procesos son distintos, es claro que están ligados conceptualmente.

A. Contextualización

En el contexto de la asignatura de Cálculo Vectorial, poseer una comprensión profunda del punto en el espacio genera en el estudiante una percepción clara del entorno tridimensional en el que se desarrollan demás objetos geométricos, conceptos y operaciones que los entrelazan. Por ejemplo, Hoyos *et. al.* (2018) explican que, más allá del cálculo de una integral múltiple, el principal obstáculo para el planteamiento de una integral múltiple consiste en identificar los índices de integración, lo que implica una visualización correcta y profunda del ambiente tridimensional y principalmente de la identificación de las coordenadas del punto en el espacio, junto con el de rectas y superficies.

Por otra parte, las aplicaciones de éstos suelen ser usados regularmente en las carreras de ingeniería, entre otros, tal como expone Abad (2016) y Costa (2013). Kösa *et. al.* (2010) menciona que, a pesar de que la visualización de objetos geométricos es importante, son pocos los métodos de enseñanza efectivos que se han propuesto. Por lo mencionado, se requiere de propuestas que faciliten el aprendizaje del punto en el espacio, más aún, en el contexto de las regiones rurales de México.

B. Propuesta de una estrategia para el aprendizaje

La estrategia propuesta en el presente artículo es sencilla de usar, no requiere equipo costoso, más que una computadora con el software MAPLE TM, en adelante MAPLE, y la mayoría de los materiales pueden ser reemplazados por otros disponibles y con la misma

función. La estrategia se aplicó con 45 estudiantes, divididos en dos grupos, en el curso de Cálculo Vectorial impartido en el Instituto Tecnológico Superior de Motul (ITSMOTUL). Los estudiantes entregaron un reporte de la dinámica en la comentaron sus conclusiones.

Al finalizar la unidad correspondiente, los estudiantes presentan una prueba escrita, a modo de examen, en la que se determina el dominio de los temas que se incluye en la unidad. Entre los resultados obtenidos, el 93% de los estudiantes aprobaron la prueba. Lo anterior sugiere un aprendizaje más significativo de los estudiantes, así como de una mayor comprensión de los temas de la unidad desde el punto de vista geométrico.

II. METODOLOGÍA

El presente trabajo se basa en el modelo propuesto por Parsys (1988) para la enseñanza de la geometría, la cual consiste en tres niveles: *nivel 0*, *nivel 1* y *nivel 2*. Según el modelo, el nivel 0 consiste en objetos concretos y físicos. El nivel 1 consiste en la representación del objeto en una figura que se parece a la figura geométrica. El nivel 2 consiste en una representación con una dimensión menor a la original, lo que implica una pérdida de la información, pero desde la cual, se puede observar las características originales.

El objetivo de la estrategia propuesta es que el estudiante de el paso del nivel 0 al nivel 1, y que éste, a su vez, facilite el paso al nivel 2. Con esto, se logra facilitar al estudiante la visualización del punto en el espacio y afianzar una comprensión profunda y clara de tal concepto que le permita resolver problemas relacionados en la asignatura de Cálculo Vectorial.

En la asignatura de Cálculo Vectorial, impartida a 45 estudiantes de tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC) del ITSMOTUL, se implementó una estrategia didáctica con el objetivo de facilitar el aprendizaje del punto en el espacio.

Antes de iniciar con la dinámica, los estudiantes presenciaron una clase en la que se les explica el concepto de punto en el espacio. Posteriormente, se procede a iniciar la dinámica de la estrategia. Los estudiantes son agrupados en equipos de dos o tres integrantes.

Para realizar la dinámica, se requiere que a cada equipo se le proporcione una esfera de unicel de

aproximadamente 3 centímetros de diámetro, tres varillas de madera de no más de 30 centímetros de largo y con base circular de menos de 0.5 centímetros de diámetro, un cubo de plástico con aristas con una longitud aproximadamente de 5 centímetros y un flexómetro.

En el caso de no poseer algún material, estos pueden ser reemplazados por otros con características similares; en lugar de la esfera de unicel, puede emplearse plastilina, masilla o algún material que sirva para unir las tres varillas por sus bases; para sustituir las varillas pueden usarse popotes u otro material similar a la forma descrita. El cubo de plástico puede ser reemplazado por cualquier otro objeto que no supere los 10 centímetros en alguna de sus dimensiones. Si no se cuenta con un flexómetro, o no se tienen los suficientes, se pueden emplear una cinta para medir, o una regla.

También se requiere del uso de una computadora en la que se haya instalado el Software MAPLE TM, al menos la versión 18.

La dinámica consiste en lo siguiente:

Se improvisa un sistema de coordenadas tridimensional empleando la esfera de unicel y las tres varillas. La esfera de unicel se considera como el origen, en ella se insertan las varillas procurando que éstas queden perpendiculares entre sí. Las varillas hacen la función de la parte positiva de los ejes x , y , z , por lo que se marcan como tal, procurando que los ejes concuerden con la orientación de la mano derecha. No se busca que el sistema improvisado sea perfecto, sino más bien, tener un marco referencia con la que se puede determinar coordenadas de puntos.

El sistema de coordenadas improvisado puede colocarse sobre alguna superficie, una mesa o una silla, por ejemplo. No se recomienda que coloque a nivel del suelo. Luego, se coloca el cubo de plástico en algún lugar del entorno, en nuestro caso, el aula. Con la cinta métrica se calculan las coordenadas en x , en y , y en z . Los estudiantes anotan las coordenadas obtenidas del cubo de plástico. Posterior a ello, el cubo de plástico se coloca en lugares diferentes al anterior, una a la vez, procurando que las coordenadas obtenidas correspondan a octantes distintos del espacio tridimensional correspondiente al sistema de coordenadas improvisado. Los estudiantes, también anotan las coordenadas que obtienen.

La Figura 1, muestra el sistema de coordenadas de uno de los equipos. También muestra el uso del flexómetro para calcular la coordenada z del cubo azul, colocado sobre otros dos cubos en verde y anaranjado.



Figura 1. Sistemas de coordenadas tridimensional. Fuente: Elaboración propia.

El siguiente paso siguiente consiste en que los alumnos muestren gráficamente la ubicación del punto haciendo uso del Software Maple. La ubicación del cubo azul de la Figura 1, puede determinarse siguiendo a los vectores paralelos a los ejes de coordenadas. Véase Figura 2.

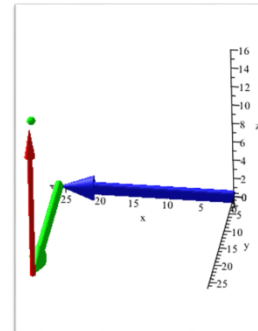


Figura 2. Gráfica de un punto en el espacio. Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, los estudiantes elaboran un reporte de la dinámica y lo entregan como parte de las actividades a evaluar de la primera unidad de la asignatura de Cálculo Vectorial.

El rol del docente durante la dinámica es la de observar el desempeño de los estudiantes, así como hacer de guía para ellos y retroalimentarlos según se requiera. También marca y evalúa el reporte de la dinámica en la que los estudiantes explican sus logros y conclusiones.

III. RESULTADOS

Como se ha dicho antes, el principal resultado obtenido es la aprobación del 93% de los 45 estudiantes que participaron en esta dinámica, esto luego de que los estudiantes elaboraran un reporte y posteriormente tomaran una prueba escrita con los contenidos de la unidad 1, en el tema del punto en el espacio fue incluido como parte fundamental para resolver algunos de los ejercicios de la prueba.

No obstante, es valioso mencionar las conclusiones y reflexiones de algunos de los estudiantes, mismas que se encuentran escritas en los reportes que elaboraron y entregaron. A continuación, se proporcionan las conclusiones de tres de los equipos. Los nombres de los integrantes no serán revelados y los equipos serán mencionados como Equipo 1, Equipo 2 y Equipo 3.

El Equipo 1 menciona:

En este caso utilizamos vectores para la identificación de puntos en el espacio. Con las herramientas necesarias, colocamos un objeto en un punto, posteriormente identificamos las coordenadas para saber su localización. Posteriormente, la representación de nuestro plano consiste de tres dimensiones conocidas como: izquierda o derecha, arriba o abajo, y atrás o adelante, con base a la realidad. Matemáticamente, se habla de los tres ejes en coordenadas cartesianas, llamados comúnmente X, Y, Z. Con esto podríamos decir que nos ha enseñado a tener un amplio razonamiento sobre el tema, hemos utilizado recursos tecnológicos (software maple 18) para una mejor comprensión y la adquisición de nuevos conocimientos que nos ayudará en nuestra carrera, porque estos ejercicios nos forman las bases para comprender y analizar y poder poner en práctica los temas que se verán más adelante. (26 de septiembre de 2018)

Al respecto, el Equipo 2 dice lo siguiente:

En este trabajo me llevo el aprendizaje de la programación básica de la aplicación Maple, el cual fue muy útil para graficar y representar puntos y vectores, mismo que ayudó para entender de manera más clara cómo funcionan los vectores en el espacio.

También comprendimos como localizar un punto con el sistema de coordenadas; al principio fue confuso saber el punto de origen y

el punto final de cada uno de los vectores que conforman las coordenadas. Como se menciona al principio, gracias a la aplicación Maple fue más fácil comprender estos detalles que suelen ser un poco confusos y difíciles de entender. Al final de este trabajo no quedan complicaciones para resolver y graficar vectores, es cuestión de observar detenidamente para poder entender cada detalle. (18 de septiembre de 2018)

Finalmente, el Equipo 3 manifiesta que:

En este trabajo aprendimos a sacar vectores midiendo diferentes puntos luego en la aplicación maple demostramos como queda la solución por medio de unas formulas, al final del trabajo podemos notar como nos muestra la gráfica mostrando los puntos de intersección en este caso lo que realizamos es buscar los puntos p y q. Para nosotros la aplicación MAPLE es mucho más funcional ya que nos permite elaborar nuestras graficas de una manera más fácil. También a base de nuestra estructura aprendimos a sacar los vectores "x", "y", "z", midiendo las distancias como se muestra en la parte de arriba (las flechas), ya que nosotros usamos plastilina donde formamos un animalito y la base lo pusimos en una mesa y el objeto arriba de una botella y el segundo vector para sacarla lo pusimos en una silla para poder sacarle los vectores necesarios y ya teniendo los dos vectores hicimos la gráfica en la aplicación maple y al final todos llegamos a la conclusión que trabajando de manera manual nos podemos ayudar como equipo y apoyarnos entre nosotros y dejándonos una gran enseñanza a todos porque aprendimos muchas cosas en este tema, es decir conociendo nuevas cosas como en la aplicación de MAPLE. (22 de octubre de 2018)

IV. DISCUSIÓN

A partir del trabajo descrito, se puede concluir que los estudiantes logran mejorar su capacidad para determinar las coordenadas del punto en el espacio. Además, también logran describir la forma de determinar y ubicar tales coordenadas.

A partir de lo expresado por los equipos de estudiantes, podemos observar que se ha logrado

- Partiendo de un objeto concreto, se han usado los vectores para determinar e

identificar las coordenadas del punto en el espacio,

- descripción del sistema de coordenadas tridimensional, así como una correcta interpretación de las componentes x , y y z en dicho sistema, y
- el manejo de MAPLE para hacer gráficas de vectores y puntos en el espacio, ayudando a mejorar la comprensión del espacio tridimensional.

De acuerdo con modelo de Parsys, se puede observar que se ha logrado pasar del nivel 0 al nivel 1, mientras que la representación en MAPLE facilita el paso hacia el nivel 2.

En comparación con los resultados obtenidos, Puga *et. al.* (2016) propone la manipulación de objetos físicos y visuales, logrando incluso la deducción, por parte de algunos estudiantes, de algunas fórmulas de proyección de un vector sobre otro. Sin embargo, la estrategia se aplicó con tan sólo dos estudiantes. Por otra parte, Medina *et. al.* (2013) diseñaron un cuestionario en donde las preguntas sirven de guía para introducir al concepto, siendo las primeras preguntas las que sitúan al estudiante en un ambiente tridimensional, y las últimas las preguntas de resolución de ejercicios usando coordenadas. No obstante, son en éstas últimas preguntas con un porcentaje entre el 50 y el 80 por ciento de errores cometidos.

En cuanto a las herramientas para facilitar el aprendizaje del punto, Poot *et. al.* (2018) desarrollaron un sistema de realidad aumentada (RA) como asistente de la enseñanza de vectores para la asignatura de Física. Dicho sistema permite mostrar vectores tridimensionales y el resultado de algunas operaciones como el producto cruz. Mas, sin embargo, no se propone alguna estrategia de aprendizaje y no muestran estudios al respecto. Además, no siempre se cuenta con el equipo necesario para la enseñanza en las instituciones. Hoyos (2018) propone el uso del software “GAnalítica3D” para ayudar a evaluar la realización de las tareas de los estudiantes. Tales tareas incluyen ejercicios relacionados con el punto en el espacio y las superficies tridimensionales más estudiadas en geometría analítica. Entre los resultados reportados se encuentran el fomento a la exploración y al trabajo autónomo, así como de un proceso más reflexivo por parte de los estudiantes. También se reportan que la falta de infraestructura de cómputo es

una dificultad para llevar a cabo las tareas con el software propuesto. Río (2016) presenta ejemplos de construcciones de figuras tridimensionales, generadas en GeoGebra, que pueden ser usadas para la enseñanza del Cálculo, pero deja abierto su implementación y articulación en el ambiente didáctico.

Otra propuesta en cuanto al uso de recursos tecnológicos lo presentan Salazar *et. al.* (2012). En este artículo, se propone el uso del software Cabri 3D para ayudar a los estudiantes a contestar preguntas en las que se requiere de describir y establecer propiedades y ecuaciones de puntos o figuras geométricas tridimensionales. Se concluye que, con estas actividades, es posible pasar de la realidad y lo concreto a la representación de figuras 3D.

De igual forma, Kösa (2010) hace uso del software Cabri 3D para facilitar la visualización del estudiante en problemas guiados del cálculo de las ecuaciones de la recta. Concluye que el uso de un software gráfico, Cabri 3D es este caso, facilita la visualización de problemas y se convierte en una herramienta potente para la enseñanza.

Se observa que los resultados mejoran cuando se hace uso de un software que permita hacer gráficas tridimensionales y con una interfaz fácil de manejar.

V. CONCLUSIONES

Se puede concluir que el manejo de objetos físicos concretos, los cuales permiten al estudiante su manipulación directa, no sólo facilita la comprensión del concepto que se desea abordar, en el caso del presente artículo, la localización y visualización de puntos en un entorno tridimensional, sino también da paso a la representación de los objetos en figuras de manera que sus características puedan ser observadas.

Es importante agregar que el uso de un software que permita la visualización gráfica de objetos tridimensionales, como MAPLE en este caso, ayudan a visualizar a los objetos y mejoran los resultados, por lo que se convierten en una herramienta fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de esta y otras asignaturas.

Se propone seguir en esta línea, explorando otros conceptos, muchas veces difíciles de abordar, tales como vectores y sus operaciones, ecuaciones de rectas, planos y otras superficies, coordenadas polares entre otros, en las que se esperan mejorar aún más la comprensión de

estos conceptos y disminuir los índices de reprobación de asignaturas como Cálculo Vectorial y relacionadas.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al ITSMOTUL por darme la oportunidad de explorar estas estrategias en mis clases, así como a los estudiantes que participaron con entusiasmo en la dinámica y quienes compartieron su experiencia a través de los reportes que entregaron.

También agradezco a Iván de Jesús May Cen, por motivarme a escribir este artículo, y a continuar pensando en cuestiones académicas y científicas.

REFERENCIAS

Abad, P., Santana, F. J., Romero-López, P., Acosta, F., Toscano, F., Iglesias, J., y Martín, M. (2016). Situaciones de aprendizaje de Tecnologías Geomáticas para preuniversitarios. *III Jornadas Iberoamericanas de Innovación Educativa en el ámbito de las TIC: InnoEducaTIC 2016*, 326-330.

Costa, V. A., Landerreche, F., y Colman Lerner, J. L. (2013). El cálculo vectorial en la formación del ingeniero. *II Jornadas de Investigación y Transferencia de la Facultad de Ingeniería*, 204 – 209.

Hoyos, E., Aristizabal, J., Vargas, O., y Arcila, D. (2018). Enseñanza de la geometría analítica 3D mediada con recursos digitales.

Kösa, T., & Karakuş, F. (2010). Using dynamic geometry software Cabri 3D for teaching analytic

geometry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1385-1389.

Medina Chávez, P. F., y Otárola Rubilar, M. M. (2013). Dificultades de aprendizaje en la visualización y representación de figuras geométricas simples en el espacio tridimensional en alumnos de cuarto año medio de Chillán. Recuperado de <http://repobib.ubiobio.cl/jspui/handle/123456789/1841>

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, 19(1), 79-92.

Poot, A. D. J. C., González, A. M., Domínguez, V. H. M., y Romero, A. E. (2018). Aprendizaje de vectores euclidianos utilizando un sistema de realidad aumentada. *Research in Computing Science*, 89, 9 – 16.

Puga, K., Castillo, L., Gómez, E., Santoyo, E., y Santoyo, F. (2016). Un acercamiento al espacio tridimensional a través de la manipulación de objetos físicos y visuales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 376 – 383.

Río, L. S. D. (2016). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, 17.

Salazar, J. V. F., Gaita, C., y Beteta, M. (2012). Introducción a la Geometría analítica espacial con Cabri 3D. *Actas del VI Congreso Iberoamericano de Cabri*, 278 – 285.