



# Encontrando la geometría de las órbitas de los cuerpos celestes alrededor del Sol con Geogebra

## Finding the geometry of the orbits of celestial bodies around the Sun with Geogebra

Francisco Rendón Acosta<sup>1\*</sup> e Iván Guadalupe Mendoza Alonzo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Agroingeniería de la Universidad del Papaloapan, Circuito Central 200, Parque Industrial, 68301 San Juan Bautista Tuxtepec, Oaxaca, México.*

*\*Corresponding author:  
frendon@unpa.edu.mx*

**Resumen:** De la segunda ley del movimiento de Newton y la ley de la gravitación se construye un modelo de dos cuerpos donde uno de ellos, el Sol, es orbitado por otro cuerpo celeste menos masivo. El modelo encontrado se puede escribir como un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuya solución analítica en coordenadas polares depende la excentricidad  $\epsilon$ . Utilizando el software *GeoGebra* se encontró que dependiendo del valor de  $\epsilon$ , las órbitas pueden ser *cerradas: circunferencias y elipses*, o *abiertas: parábolas e hipérbolas*. Para el caso de las órbitas elípticas se demuestra que el cuerpo celeste se mueve con mayor rapidez cuando está más cerca del sol (*perihelio*) que cuando está en su punto más alejado (*afelio*). Se realiza una estimación del afelio y las rapidezces orbitales mínima y máxima de los ocho planetas del Sistema Solar. La diferencia entre los valores arrojados por el modelo con aquellos estimados por la NASA en 2021 es insignificante.

**Palabras clave:** problema de 2-cuerpos, órbitas planetarias, afelio, perihelio, GeoGebra.

**Abstract:** From Newton's second law of motion and law of universal gravitation we develop a model of two celestial bodies. In our model, a low mass celestial body orbits the sun. We find that the motion can be written as a pair of second order and degree differential equations. These equations have an analytical solution in polar coordinates which depends on the eccentricity  $\epsilon$ . By using the *GeoGebra* software, we find that depending on the value of  $\epsilon$ , the orbit can be a *closed curve: a circle or an ellipse*, or an *open curve: a parabola or a hyperbola*. For elliptical orbits, we show that the celestial body moves faster when it is closer to the sun (*perihelion*) than when it is at its furthest point (*aphelion*). We show the aphelion, and minimum and maximum orbital speeds of the eight planets of the

**solar system. Our estimations compared to NASA's in 2021 are very alike.**

**Keywords: 2-body problem, planetary orbits, aphelion, perihelion, GeoGebra.**

## I. INTRODUCCIÓN

En ocasiones, resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no tiene sentido si estas no definen algún fenómeno que pueda ocurrir en la vida cotidiana o en la naturaleza. Precisamente, las aplicaciones en economía, ingeniería, biología, química, física o astrofísica son un punto muy importante para motivar el interés en su aprendizaje.

Es de dominio público que tanto la Tierra como el resto de los planetas del Sistema Solar giran al redor del Sol en órbitas elípticas. Sin embargo, desconocen que el movimiento de estos objetos cósmicos puede ser modelado mediante un sistema de ecuaciones diferenciales, incluso que, existen cuerpos celestes que describen otros tipos de órbitas, bien pueden ser hipérbolas o parábolas.

El estudio del movimiento de los cuerpos celestes se remonta desde la época de los griegos, iniciando con Aristóteles (Denat, 2010). Muchos siglos más tarde, Kepler, basándose en observaciones realizadas por el astrónomo Tycho Brae, logró demostrar que los planetas giran en torno al Sol en órbitas elípticas y Newton lo pudo corroborar gracias a la gravedad (Halliday et al., 2011). También existe evidencia observacional, desde principios del siglo XIX, que otros cuerpos celestes en el Sistema Solar, como los cometas, poseen órbitas con otras geometrías: *hiperbólicas* o *parabólicas* (Hansen, 1944). En noviembre de 2018, se descubrió el cometa C/2018 V1 y se estimó que posee una órbita hiperbólica (de la Fuente Marcos & de la Fuente Marcos, 2019); así como el cometa C/2012 S1 (Hergenrother, 2013), descubierto en septiembre de 2012 por astrónomos del *the International Scientific Optical Network*, el cual se desintegró el 28 de noviembre de 2013 pocas horas después de haber pasado por su punto más cercano al Sol (187000 km); mientras que, el cometa C/2012 B3, descubierto en 2012 por astrónomos del Observatorio Astronómico de Mallorca, se aproximó al Sol siguiendo una órbita parabólica (Sato et al., 2012).

Crear un modelo completo del Sistema Solar sería algo extremadamente complejo, ya que este está constituido

por ocho planetas, cinco planetas enanos, así como de un sin número de asteroides y cometas. Sin embargo, existe evidencia científica de sistemas estelares donde la estrella central es orbitada solamente por un planeta, por ejemplo, el caso de la estrella *11 Ursae Minoris* que es orbitada por un planeta gigante gaseoso de 14.74 masas de Júpiter (Döllinger et al., 2009).

Lo anterior ha dado la pauta de proponer un modelo lo suficientemente sencillo del Sistema Solar que dependa de la excentricidad  $\epsilon$  de la órbita del cuerpo celeste, con el que se pueda explicar la geometría de dicha órbita, así como las rapideces orbitales en algunos puntos específicos.

## II. MARCO TEÓRICO

Desde el punto de vista matemático, el movimiento de los cuerpos celestes que orbitan al Sol se traduce en resolver el *problema de n-cuerpos* considerando  $N$  puntos de masa  $m_i, i=1,2,\dots,N$  moviéndose bajo la influencia de la atracción gravitacional mutua en el espacio tridimensional. No obstante, la solución de este problema no es del todo sencilla ya que hay que resolver un sistema de  $6N$  ecuaciones diferenciales de primer orden con  $6N$  condiciones iniciales (Aaseth, 2003). Además, para el caso de los planetas, estos deben de seguir la primera ley del movimiento Kepler:

**Ley 1 (LEY DE LAS ÓRBITAS)** *Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando este situado en uno de los focos de la elipse* (Walker, 2011). Esta ley fue deducida por Kepler, haciendo ajustes geométricos de observaciones del movimiento del planeta Marte sobre la bóveda celeste. Sin embargo, fue Isaac Newton casi dos siglos después, para ser precisos en 1665, que descubrió un principio sencillo con el que puedo explicar y cuantificar la Primera ley de Kepler. Derivado del estudio del movimiento de la Luna y los planetas, Newton concluyó no solo que la Tierra atrae a una manzana y a la Luna, sino que también el Sol atrae a los planetas; a esta tendencia de los cuerpos de ser atraídos hacia otro, Newton la llamó *gravitación*, y depende tanto de la masa de los cuerpos interactuantes, así como de las distancias entre ellos.

**Ley 2 (LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL)** *Cada partícula de materia en el Universo atrae a todas las demás partículas con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas de las partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia*

entre ellas (Young & Freedman, 2016). Matemáticamente la ley anterior se expresa de la siguiente forma:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

Donde  $F$  es la magnitud de la fuerza ejercida entre los dos cuerpos,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos,  $r$  es la distancia entre los cuerpos, y  $G$  es la constante de gravitación universal. Newton no pudo establecer el valor de  $G$  ya que no contaba con datos suficientes, solo pudo deducir que debería ser un número muy pequeño. No fue hasta 1798 que Henry Cavendish obtuvo un valor implícito de  $G$  al estimar la densidad de la Tierra.

En su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, donde Newton publicó la ley de la gravitación universal, también desveló otros tres principios físicos fundamentales relativos al movimiento de los cuerpos. Estas leyes describen la relación que existe entre un cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él, y su movimiento en respuesta a dichas fuerzas.

Ley 3 (PRIMERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON) *Un cuerpo sobre el que no actúa una fuerza neta se mueve con velocidad constante (que puede ser cero) y aceleración cero* (Young & Freedman, 2016).

Ley 4 (SEGUNDA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON) *La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo y su aceleración* (Walker, 2011).

Ley 5 (TERCERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON) *Cuando dos cuerpos interactúan, las fuerzas sobre los cuerpos de uno sobre el otro son siempre iguales en magnitud y opuestas en dirección* (Walker, 2011). La primera ley del movimiento de Newton simplemente quiere decir que, los cuerpos no pueden comenzar a moverse, detenerse o cambiar de dirección por sí mismos. Se necesita cierta fuerza que actúe sobre ellos desde el exterior para causar tal efecto. Esta propiedad de los cuerpos de resistir los cambios en su estado de movimiento se llama *inercia*. Es por esta razón que los planetas al girar alrededor del Sol no salen disparados en direcciones tangentes a sus órbitas.

Por otro lado, la segunda ley del movimiento de Newton describe lo que ocurre cuando una fuerza neta externa distinta de cero actúa sobre él, es decir, el cuerpo

acelera. La dirección de la aceleración es la misma que la dirección de la fuerza neta. Matemáticamente se puede escribir como:

$$\vec{F}_{net} = m \vec{a},$$

donde  $\vec{F}_{net}$  es el vector fuerza neta,  $m$  es la masa del cuerpo y  $\vec{a}$  es el vector aceleración.

Finalmente, la tercera ley del movimiento Newton describe lo que ocurre como consecuencia de la interacción entre dos cuerpos. Es decir, cuando un cuerpo ejerce una fuerza (*acción*) sobre un segundo cuerpo este último siempre ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta (*reacción*) sobre el primero. De este modo, en el sistema Sol-Tierra, la fuerza que ejerce el Sol sobre la Tierra es exactamente igual pero con signo opuesto a la que la Tierra ejerce sobre el Sol.

Las tres leyes del movimiento de Newton han sido verificadas por innumerables experimentos en los últimos tres siglos, y todavía se utilizan ampliamente hasta el día de hoy para describir el comportamiento de algunos fenómenos de la naturaleza. Forman, además, la base de lo que ahora se conoce como *mecánica clásica*, que comprende el estudio de los cuerpos que son más grandes en comparación con las escalas muy pequeñas abordadas por la *mecánica cuántica*, y que se mueven muy lentamente comparadas con las altísimas velocidades abordadas en la *mecánica relativista*.

### III. METODOLOGÍA

#### A. Deducción del modelo matemático

Considérese que el Sol de masa  $M_{\odot}$  yace fijo en el origen del plano- $xy$ , mientras que es orbitado por un cuerpo celeste de menor masa  $m_c$  (planeta, asteroide, cometa, etc.) que se encuentra en el punto  $P(x, y)$  al tiempo  $t$ , como se muestra en la Figura 1. La única fuerza  $\vec{F}_{\odot}$  que el cuerpo celeste siente es el tirón gravitacional por parte del Sol que le permite moverse. Luego, por la segunda ley de Newton  $\vec{F}_{\odot} = m_c \vec{a}_c$ , o en términos de las componentes  $x$  y  $y$ ,

$$F_{\odot}^{(x)} = -F_{\odot} \cos(\theta) = m_c a_c^{(x)}, \quad (1a)$$

$$F_{\odot}^{(y)} = -F_{\odot} \sin(\theta) = m_c a_c^{(y)}, \quad (1b)$$

donde  $m_c$  y  $\vec{a}_c = (a_c^{(x)}, a_c^{(y)})$  son la masa y la aceleración del cuerpo celeste, respectivamente.

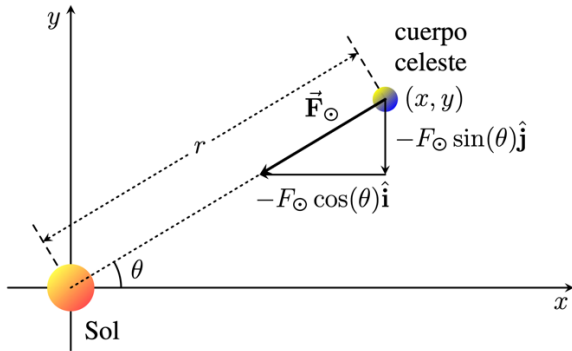


Figura 1: Representación de la fuerza de atracción gravitacional  $F_{\odot}$  ejercida por el Sol sobre un cuerpo celeste que lo orbita en la posición  $P(x, y)$  al tiempo  $t$ .  
Fuente: Elaboración propia.

Por la Ley de la Gravitación de Newton, la magnitud de la fuerza  $F_{\odot}$  es  $G M_{\odot} m_c / r^2$ , donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la distancia entre los dos cuerpos celestes. Dado que la aceleración es la segunda derivada de la posición,  $\vec{s} = (x, y)$ , respecto al tiempo, es decir,  $\vec{a}_c = d^2 \vec{s} / dt^2$ , en términos de las componentes  $x$  e  $y$  de los vectores fuerza y aceleración, de la Ecuación (1) se sigue que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-G M_{\odot} x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (2a)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-G M_{\odot} y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (2b)$$

Por construcción, se asume que al tiempo  $t=0$  el cuerpo celeste se localiza a una distancia  $d_0$  del Sol (sobre el eje  $x$ ) y que se mueve en sentido antihorario con una rapidez orbital  $v_0$ ; de aquí que, las condiciones iniciales de las Ecuaciones (2a) y (2b) son:

$$x(0) = d_0, y(0) = 0, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_0. \quad (2c)$$

El problema de valor inicial, definido por la Ecuación (2) no se puede solucionar analíticamente en el sistema cartesiano  $(x, y)$ . Para ello se realiza un cambio de coordenadas al sistema polar  $(r, \theta)$ , mediante la transformación  $x(t) = r \cos(\theta)$ ,  $y(t) = r \sin(\theta)$ . Lo que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado y orden

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{-G M_{\odot}}{r^2} \cos(\theta), \quad (3a)$$

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dr} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0, \quad (3b)$$

donde la condición inicial es

$$r(0) = d_0, \theta(0) = 0, \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = 0, \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = \frac{v_0}{d_0}. \quad (3c)$$

### B. Solución analítica del modelo matemático

La Ecuación (3) define el movimiento de un cuerpo celeste que orbita al Sol por acción de la fuerza gravitacional en coordenadas polares. Multiplicando la Ecuación (3b) por  $r$ , esta se reescribe como:

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0;$$

integrando la ecuación anterior y utilizando las condiciones iniciales definidas por la Ecuación (3c) se obtiene que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d_0 v_0}{r^2}. \quad (4)$$

Usando este resultado, la Ecuación (3a) se reescribe en la forma:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{G M_{\odot}}{r^2}. \quad (5)$$

Haciendo la sustitución  $\xi = \frac{dr}{dt}$  y dado que  $\xi=0$  cuando  $r=d_0$ , la Ecuación (5) se puede llevar a la forma:

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2 G M_{\odot}}{r} - \frac{d_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{d_0 v_0^2 - 2 G M_{\odot}}{d_0}. \quad (6)$$

Ya que se requiere una ecuación diferencial que relacione a  $r$  y  $\theta$ , para así hallar una solución de la forma  $r(\theta)$  la cual no dependa explícitamente de  $t$ , y

asumiendo que  $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ , por la regla de la cadena se

sigue que  $\frac{dr}{d\theta} = \left( \frac{dr}{dt} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^{-1}$ , véase Stewart (2012).

Así, de las Ecuaciones (4) y (6) se obtiene la siguiente ecuación diferencial que relaciona a las variables  $r$  y  $\theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r \sqrt{\alpha r^2 + 2\beta r - 1};$$

$$\alpha = \frac{d_0 v_0^2 - 2GM_\odot}{d_0^3 v_0^2},$$

$$\beta = \frac{2GM_\odot}{d_0^2 v_0^2}.$$

Haciendo la sustitución  $u = \frac{1}{r}$ , la ecuación anterior se

transforma en

$$\frac{-du}{\sqrt{(\alpha - \beta^2) - (u - \beta)^2}} = \pm d\theta,$$

Cuya solución es

$$u = \beta + \sqrt{\alpha + \beta^2} \cos(\kappa \pm \theta), \quad (7)$$

donde  $\kappa$  es una constante de integración.

Definiendo la excentricidad de la órbita como

$$\epsilon = \frac{\alpha + \beta^2}{\beta} = \sqrt{\frac{d_0^4 v_0^4 - 2GM_\odot v_0^2 + G^2 M_\odot^2}{G^2 M_\odot^2}} = \frac{d_0 v_0^2}{GM_\odot} - 1$$

y reescribiendo la Ecuación (7) en términos de  $r$  y  $\epsilon$ , se sigue que

$$r(\theta) = \frac{d_0(1+\epsilon)}{1+\epsilon \cos(\kappa \pm \theta)}. \quad (9)$$

Finalmente, ya que  $r = d_0$  cuando  $\theta = 0$ , de la Ecuación (9) se infiere que  $\kappa = 2n\pi$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Sin pérdida de generalidad, tomando  $\kappa = 0$ , (i.e.  $n = 0$ ), la Ecuación (9) se transforma en

$$r(\theta) = \frac{d_0(1+\epsilon)}{1+\epsilon \cos(\theta)}. \quad (10)$$

La Ecuación (10) es la solución del problema de valor inicial definido por la Ecuación (3).

#### IV. RESULTADOS

La Ecuación (10) es la forma polar de una sección cónica que tiene excentricidad  $\epsilon$ . Utilizando el software libre *GeoGebra*, véase la Figura 2, se encontró que para  $\epsilon = 0$ , dicha ecuación representa una *circunferencia*; para  $0 < \epsilon < 1$ , representa una *elipse*; para  $\epsilon = 1$ , representa una *parábola*; mientras que para  $\epsilon > 1$ , representa una *hipérbola*, tal como lo muestra Blitzer (2013).

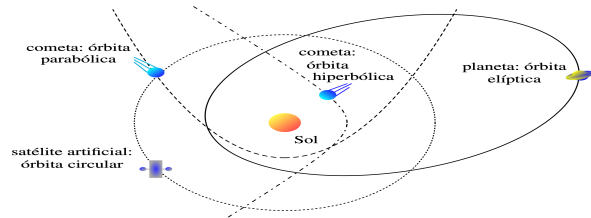


Figura 2: Geometrías de las órbitas de los cuerpos celestes que orbitan el Sol graficadas con GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

#### A. Órbitas elípticas: afelios y perihelios

Debido a que el Sol no se localiza en el centro de una órbita elíptica, sino en uno de sus focos, a medida que los cuerpos celestes giran en torno a él, estos se acercan y se alejan, dando lugar a dos puntos geométrico-astrofísicos muy importantes: el *perihelio* y el *afelio*. El lugar donde un cuerpo celeste se encuentra más cerca del Sol se denomina perihelio, mientras que aquel donde se encuentra más lejos se llama afelio. Estos vocablos derivan de griego *helios* que significa Sol, *peri* que significa cerca, y *apo* que significa lejos de.

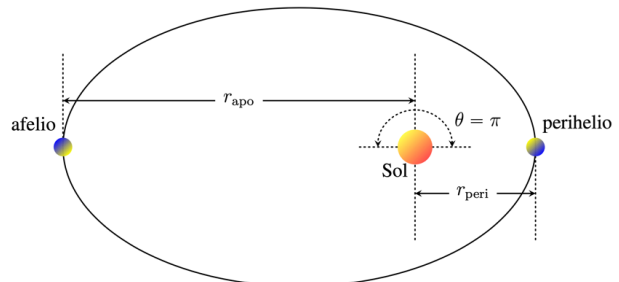


Figura 3: Afelio y perihelio de un cuerpo celeste sobre una órbita elíptica. Fuente: Elaboración propia.

De las condiciones iniciales definidas por la Ecuación (3c) y de la Ecuación (10) se infiere que el perihelio ocurre en

$$r_{peri} = d_0. \quad (11)$$

Mientras que de la Ecuación (8) se sigue que la rapidez orbital del cuerpo celeste en este punto es

$$v_{peri} = v_0 = \sqrt{(1+\epsilon) \frac{GM_\odot}{d_0}}. \quad (12)$$

Ya que el afelio ocurre cuando  $\theta = \pi$ , de la Ecuación (10) se sigue que

$$r_{apo} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} d_0 \cdot (13)$$

Además, de las Ecuaciones (4) y (5) se obtiene que la rapidez orbital del cuerpo celeste en el afelio ( $\theta = \pi$ ) es

$$v_{apo} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} v_0 \cdot (14)$$

Dado que  $(1-\epsilon)/(1+\epsilon) < 1$ , ya que  $0 < \epsilon < 1$ , de las Ecuaciones (11) y (13) se sigue que  $r_{apo} < r_{peri}$ , mientras que de las Ecuaciones (12) y (14) se infiere que  $v_{apo} < v_{peri}$ .

En la Tabla 1 se muestra el valor estimado, mediante la Ecuación (13), del afelio de los ocho planetas del Sistema Solar; en dicha estimación se utilizaron datos de la NASA.

**Tabla 1. Estimación del afelio de los planetas del Sistema Solar. Fuente: <sup>(a)</sup>Datos de la NASA (Williams, 2021). <sup>(b)</sup>Estimación propia.**

Planeta	Excentricidad <sup>(a)</sup>	Perihelio <sup>(a)</sup> [10 <sup>6</sup> km]	Afelio <sup>(a)</sup> [10 <sup>6</sup> km]	Afelio <sup>(b)</sup> [10 <sup>6</sup> km]
Mercurio	0.2056	46.000	69.818	69.810
Venus	0.0068	107.480	108.941	108.951
Tierra	0.0167	147.095	152.100	152.091
Marte	0.0935	206.650	249.261	249.279
Júpiter	0.0487	740.595	816.363	816.421
Saturno	0.0520	1 357.554	1 506.527	1 506.483
Urano	0.0469	2 732.696	3 001.390	3001.636
Neptuno	0.0097	4 471.050	4 558.857	4558.637

En la Tabla 2 se muestran los valores estimados de las rapideces orbitales mínima (en el afelio) y máxima (en el perihelio) de los ocho planetas del Sistema Solar. Estos valores se obtuvieron utilizando  $M_{\odot} = 1998500 \times 10^{24}$  kg (Williams, 2021) y  $G = 6.6742 \times 10^{-11}$  N · m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> (Halliday et al., 2011) en las Ecuaciones (12) y (14), respectivamente, así como los valores de los perihelios planetarios encontrados en Williams (2021).

**Tabla 2. Rapideces orbitales mínima y máxima de los planetas del Sistema Solar. Fuente: <sup>(c)</sup>Datos de la NASA (Williams, 2021). <sup>(d)</sup>Estimación propia.**

Objeto	Rapidez orbital mínima <sup>(c)</sup> [km/s]	Rapidez orbital mínima <sup>(d)</sup> [km/s]	Rapidez orbital máxima <sup>(c)</sup> [km/s]	Rapidez orbital máxima <sup>(d)</sup> [km/s]
Mercurio	38.86	38.861	58.98	58.977
Venus	34.79	34.782	35.26	35.259
Tierra	29.78	29.292	30.29	30.287
Marte	21.97	21.968	26.50	26.500
Júpiter	12.44	12.435	13.72	13.708
Saturno	9.09	9.138	10.18	10.141
Urano	6.49	6.491	7.11	7.130
Neptuno	5.37	5.369	5.50	5.474

## V. CONCLUSIONES

De la implementación de la segunda ley del movimiento de Newton y la ley de la gravitación universal, se puede construir un modelo *de primer orden* de la interacción entre el Sol y un cuerpo celeste menos masivo. Este modelo concluye que la órbita que puede seguir dicho cuerpo puede ser una curva cerrada: *circunferencia* o *elipse*, o una curva abierta: *una parábola* o una *hipérbola*, tal como lo afirman las observaciones astronómicas. Sin embargo, este modelo no logra explicar una anomalía en la órbita del planeta Mercurio conocida como *precesión*, es decir, el bamboleo de la órbita (como el movimiento de los trompos). Este fenómeno va más allá de la mecánica Newtoniana, siendo propio de la mecánica relativista.

Asimismo, el modelo logra explicar que los cuerpos celestes que siguen órbitas elípticas, como los planetas, planetas enanos, y algunos asteroides y cometas (1) presentan un acercamiento máximo al Sol (perihelio) así como un alejamiento máximo (afelio), donde  $r_{peri} < r_{apo}$ ; y (2) la rapidez orbital del cuerpo celeste en el afelio es menor que aquella en el perihelio ( $v_{peri} > v_{apo}$ ), lo que quiere decir que: *los cuerpos celestes se mueven más rápido cuando se aproximan al Sol, adquieren una rapidez máxima en el perihelio y*

justamente después comienzan a desacelerar, alcanzando su velocidad mínima en el afelio.

Se encontró que los afelios y rapideces orbitales mínima (en el afelio) y máxima (en el perihelio) de los ocho planetas del Sistema Solar estimadas con el modelo desarrollado son muy parecidas a aquellas registradas por la NASA en Williams (2021).

#### REFERENCIAS

- Aarseth, S. J. (2003). *Gravitational N-body Simulations: Tools and Algorithms*, Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Blitzer, B (2013). *Precalculus*, 5th edition, Londres, Reino Unido: Pearson Education.
- de la Fuente Marcos, C., & de la Fuente Marcos, R. (2019). *Comet C/2018 V1 (Machholz-Fujikawa-Iwamoto): dislodged from the Oort Cloud or coming from interstellar space?* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 489(1), 951-961.
- Denat, C. (2010) *Aristote pas à pas*, París, Francia: Editons Ellipses,
- Döllinger, M. P.; Hatzes, A. P.; Pasquini, L.; Guenther, E. W.; Hartmann, M. (2009). *Planetary companions around the K giant stars 11 Ursae Minoris and HD 32518*. Astronomy and Astrophysics, 505 (3), 1311-1317.
- Halliday, D; Resnick, R. & Walker, J. (2011). *Fundamentals of Physics*, Nueva York, EE. UU: John Wiley & Sons, Inc.
- Hansen, J. M. V. (1944). *The orbits of comets*. Popular Astronomy, 52, 370.
- Hergenrother, C. (2013). *Comet C/2012 S1 (ISON) From 'Comet of the Century' to 'Thanks-giving Turkey'*. Journal of the Association of Lunar and Planetary Observers, the Strolling Astronomer, 56(1), 22-28.
- Sato, H., Ryan, W. H., Ryan, E. V., Rochowicz, K., Sostero, G., Guido, E., Howes, N., & Williams, G. V. (2012). *Comet C/2012 B3 (la Sagra)*. Central Bureau Electronic Telegrams, 3012, 1.
- Stewart, J. (2012). *Calculus. Early transcendentals*, 7ma edición, Belmont, California, EE. UU: Brooks/Cole.
- Walker, J. (2011). *Fundamentals of Physics*, Nueva York, EE. UU: John Wiley & Sons, Inc
- Williams, D. (2021). *Planetary Facts Sheets*. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html>
- Young, H. D., & Freedman, R. A. (2016). *University Physics with Modern Physics*, Londres, Reino Unido: Pearson.